線形計画

$\boxed{3}$

パラメータ $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^\top \in \mathbb{R}^n$ をもつ次の線形計画問題 $\mathrm{P}(\boldsymbol{y})$ を考える．

$$\begin{array}{lll} \mathrm{P}(\boldsymbol{y}): & \text{Maximize} & \boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{x} \\ & \text{subject to} & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} i x_i = 1 \\ & & \boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{0} \end{array}$$

ただし，$\mathrm{P}(\boldsymbol{y})$ の決定変数は $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^n$ であり，$^\top$ は転置記号を表す．

以下の問 (i) と (ii) に答えよ．

(i) 問題 $\mathrm{P}(\boldsymbol{y})$ の双対問題を書け．

(ii) 任意の $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ に対して，問題 $\mathrm{P}(\boldsymbol{y})$ が最適解をもつことを示せ．

与えられた $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ に対して，問題 $\mathrm{P}(\boldsymbol{y})$ の最適値 (最大値) を $f(\boldsymbol{y})$ とする．

以下の問 (iii) と (iv) に答えよ．

(iii) 任意の $\alpha \in [0, 1]$ と $\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n$ に対して，次の不等式が成り立つことを示せ．

$$f(\alpha \boldsymbol{y} + (1 - \alpha)\boldsymbol{z}) \leqq \alpha f(\boldsymbol{y}) + (1 - \alpha) f(\boldsymbol{z})$$

(iv) 次の最適化問題 Q を考える．

$$\begin{array}{lll} \mathrm{Q}: & \text{Minimize} & f(\boldsymbol{y}) \\ & \text{subject to} & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{i} = 1 \end{array}$$

ただし，Q の決定変数は $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ である．問題 Q の最適値 (最小値) は $\dfrac{1}{n}$ であることを示せ．

An English Translation:

Linear Programming

$\boxed{3}$

Consider the following linear programming problem $\mathrm{P}(\boldsymbol{y})$ with a vector of parameters $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^\top \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{array}{lll} \mathrm{P}(\boldsymbol{y}): & \text{Maximize} & \boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{x} \\ & \text{subject to} & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} i x_i = 1 \\ & & \boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{0}, \end{array}$$

where the decision variables of $\mathrm{P}(\boldsymbol{y})$ are $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^n$, and the superscript $^\top$ denotes transposition.

Answer the following questions (i) and (ii).

(i) Write out a dual problem of problem $\mathrm{P}(\boldsymbol{y})$.

(ii) Show that problem $\mathrm{P}(\boldsymbol{y})$ has an optimal solution for any $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$.

For a given $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$, let $f(\boldsymbol{y})$ be the optimal value (maximum value) of problem $\mathrm{P}(\boldsymbol{y})$. Answer the following questions (iii) and (iv).

(iii) Show that the following inequality holds for any $\alpha \in [0, 1]$ and $\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n$.

$$f(\alpha \boldsymbol{y} + (1 - \alpha)\boldsymbol{z}) \leqq \alpha f(\boldsymbol{y}) + (1 - \alpha) f(\boldsymbol{z}).$$

(iv) Consider the following optimization problem Q.

$$\begin{array}{lll} \mathrm{Q}: & \text{Minimize} & f(\boldsymbol{y}) \\ & \text{subject to} & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{i} = 1, \end{array}$$

where the decision variables of Q are $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$. Show that the optimal value (minimum value) of Q is $\dfrac{1}{n}$.