グラフ理論

$\boxed{2}$

$G = (V, E)$ を節点集合 V，枝集合 E から成る単純有向グラフとし，$N = [G, c]$ を G の各枝 $e \in E$ に実数値の容量 $c(e) > 0$ を与えて得られるネットワークとする．節点の部分集合 $X, Y \subseteqq V$ に対し，X 内の点から Y 内の点へ向かう枝の集合を $E(X, Y)$ と記す．非負実数全体の集合を $\mathbb{R}_+$ で表す．指定された二点 $s, t \in V$ に対し，流量保存則 $\sum_{e \in E(\{v\}, V \setminus \{v\})} f(e) - \sum_{e \in E(V \setminus \{v\}, \{v\})} f(e) = 0, {}^\forall v \in V \setminus \{s, t\}$ および容量制約 $f(e) \leqq c(e)$, ${}^\forall e \in E$ を満たす関数 $f : E \to \mathbb{R}_+$ を (s, t) フローと呼び，その流量 $\mathrm{val}(f)$ を

$$\sum_{e \in E(\{s\}, V \setminus \{s\})} f(e) - \sum_{e \in E(V \setminus \{s\}, \{s\})} f(e)$$

で定める．また，$s \in X,\ t \in V \setminus X$ を満たす節点の部分集合 $X \subseteqq V$ を (s, t) カットと呼び，その容量 $\mathrm{cap}(X)$ を

$$\sum_{e \in E(X, V \setminus X)} c(e)$$

で定める．以下の問いに答えよ．

(i) 任意の (s, t) フロー f と (s, t) カット X に対し，等式

$$\mathrm{val}(f) = \sum_{e \in E(X, V \setminus X)} f(e) - \sum_{e \in E(V \setminus X, X)} f(e)$$

が成り立つことを証明せよ．

(ii) 与えられた (s, t) フロー f に対して定められる残余ネットワーク $N_f = [G_f = (V, E_f), c_f]$ の作り方を説明せよ．

(iii) 残余ネットワーク N_f において，s から t への有向路が存在するとき，そのひとつを P とする．P 上の枝の N_f における容量の最小値を Δ とするとき，N には流量が $\mathrm{val}(f) + \Delta$ である (s, t) フローが存在することを証明せよ．

(iv) 残余ネットワーク N_f が s から t への有向路をもたないとき，N_f において s から到達可能な節点の集合を S とする．このとき，$s \in A$ である任意の集合 $A \subsetneqq S$ に対し $\mathrm{cap}(A) > \mathrm{cap}(S)$ が成り立つことを証明せよ．

An English Translation:

Graph Theory

$\boxed{2}$

Let $G = (V, E)$ be a simple directed graph with a vertex set V and an edge set E, and let $N = [G, c]$ be a network obtained from G by assigning a real value $c(e) > 0$ to each edge $e \in E$ as its capacity. For vertex subsets $X, Y \subseteqq V$, let $E(X, Y)$ denote the set of edges that leave a vertex in X and enter a vertex in Y. Let $\mathbb{R}_+$ denote the set of nonnegative reals. For two designated vertices $s, t \in V$, an (s,t)-flow is defined to be a mapping $f : E \to \mathbb{R}_+$ which satisfies $\sum_{e \in E(\{v\}, V\setminus\{v\})} f(e) - \sum_{e \in E(V\setminus\{v\},\{v\})} f(e) = 0$, $^\forall v \in V \setminus \{s, t\}$ (flow conservation law) and $f(e) \leqq c(e)$, $^\forall e \in E$ (capacity constraint), and its flow value $\mathrm{val}(f)$ is defined to be

$$\sum_{e \in E(\{s\}, V\setminus\{s\})} f(e) - \sum_{e \in E(V\setminus\{s\},\{s\})} f(e).$$

An (s,t)-cut is defined to be a vertex subset $X \subseteqq V$ such that $s \in X$ and $t \in V \setminus X$, and its capacity $\mathrm{cap}(X)$ is defined to be

$$\sum_{e \in E(X, V\setminus X)} c(e).$$

Answer the following questions.

(i) Prove that for any (s,t)-flow f and any (s,t)-cut X

$$\mathrm{val}(f) = \sum_{e \in E(X, V\setminus X)} f(e) - \sum_{e \in E(V\setminus X, X)} f(e)$$

holds.

(ii) For a given (s,t)-flow f, show how to construct its residual network $N_f = [G_f = (V, E_f), c_f]$.

(iii) For an (s,t)-flow f in N, assume that there is a directed path P from s to t in the residual network N_f. Let Δ denote the minimum capacity of an edge in P in N_f. Prove that N has an (s,t)-flow whose flow value is $\mathrm{val}(f) + \Delta$.

(iv) For an (s,t)-flow f in N, assume that there is no directed path from s to t in the residual network N_f. Let S denote the set of vertices that are reachable from s in N_f. Prove that $\mathrm{cap}(A) > \mathrm{cap}(S)$ holds for any set $A \subsetneqq S$ with $s \in A$.