現代制御論

$\boxed{4}$

状態方程式

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + Bu(t),\ y(t) = Cx(t),\ x(0) = B$$

により与えられる線形システムを考える．ただし，$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$，$B \in \mathbb{R}^{n\times 1}$，$C \in \mathbb{R}^{1\times n}$，$x(t) \in \mathbb{R}^n$ は状態，$u(t) \in \mathbb{R}$ は制御入力，$y(t) \in \mathbb{R}$ は観測出力である．また，$M_c = \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$ と定義し，$T > 0$ を定数とする．以下の問いに答えよ．

(i) 任意の入力 $u(t),\ 0 \leqq t < T$ に対して，$M_c v = x(T)$ を満たす $v \in \mathbb{R}^n$ が存在することを証明せよ．

(ii) M_c が正則とする．このとき，任意の $v \in \mathbb{R}^n$ に対して，$x(T) = v$ となる入力 $u(t),\ 0 \leqq t < T$ が存在することを証明せよ．

行列 $A,\ B,\ C$ が

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

で与えられ，$u(t) = -\sin t,\ 0 \leqq t < T$ とする．

(iii) コスト関数

$$\int_T^\infty u(t)^2 + y(t)^2 dt$$

を最小化する $u(t), t \geqq T$ を求めよ．

(iv) (iii) で得られた最小値を $V(T)$ とする．このとき，$\inf_{T>0} V(T)$ を求めよ．

An English Translation:

Modern Control Theory

$\boxed{4}$

Consider a linear dynamical system given by the state equation

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + Bu(t),\ y(t) = Cx(t),\ x(0) = B,$$

where $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, $C \in \mathbb{R}^{1\times n}$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ is a state vector, $u(t) \in \mathbb{R}$ is a control input, and $y(t) \in \mathbb{R}$ is an output. Let $M_c = \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$ and $T > 0$ be a constant. Answer the following questions.

(i) Show that, for any input $u(t),\ 0 \leqq t < T$, there exists $v \in \mathbb{R}^n$ such that $M_c v = x(T)$.

(ii) Suppose that M_c is nonsingular. Then, show that, for any $v \in \mathbb{R}^n$, there exists an input $u(t),\ 0 \leqq t < T$ such that $x(T) = v$.

Let matrices $A,\ B,\ C$ be given by

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix},$$

and $u(t) = -\sin t$ for $0 \leqq t < T$.

(iii) Find $u(t), t \geqq T$ that minimizes the cost function

$$\int_T^\infty u(t)^2 + y(t)^2 dt.$$

(iv) Let $V(T)$ denote the minumum value obtained in (iii). Then, find $\inf\limits_{T>0} V(T)$.