

グラフ理論

2

G を点集合 V , 枝集合 E から成る単純連結無向グラフとし, 各枝 $e \in E$ には実数値の重み $w(e)$ が付与されている. 点の部分集合 $X \subseteq V$ に対し X と $V \setminus X$ の間の枝の集合を $E(X)$ と記す. 枝の部分集合 $S \subseteq E$ に対して $w(S) \triangleq \sum_{e \in S} w(e)$, $w_{\max}(S) \triangleq \max_{e \in S} w(e)$ と定める. 以下の問いに答えよ.

- (i) (X, F) , $X \neq V$ を G の部分木とし, G の最小木には木 (X, F) を含むものが存在すると仮定する. $a_F = uv \in E(X)$ を $E(X)$ の中で重み最小の枝とする. このとき G の最小木には $(X \cup \{u, v\}, F \cup \{a_F\})$ を含むものが存在することを証明せよ.
- (ii) 最小木を求めるプリム法を記述し, その正当性を証明せよ.
- (iii) (V, T^*) を G の最小木とする. このとき G の任意の全域木 (V, T) に対して $w_{\max}(T^*) \leq w_{\max}(T)$ が成り立つことを証明せよ.

An English Translation:

Graph Theory

2

Let G be a simple and connected undirected graph with a vertex set V and an edge set E such that each edge $e \in E$ is weighted by a real value $w(e)$. For a subset $X \subseteq V$ of vertices, let $E(X)$ denote the set of edges between X and $V \setminus X$. For a subset $S \subseteq E$ of edges, define $w(S) \triangleq \sum_{e \in S} w(e)$ and $w_{\max}(S) \triangleq \max_{e \in S} w(e)$. Answer the following questions.

- (i) Let (X, F) , $X \neq V$ be a subtree of G and assume that one of the minimum spanning trees of G contains the tree (X, F) . Let $a_F = uv \in E(X)$ be an edge with the minimum weight among the edges in $E(X)$. Prove that one of the minimum spanning trees of G contains $(X \cup \{u, v\}, F \cup \{a_F\})$.
- (ii) Describe Prim's method for computing a minimum spanning tree and prove its correctness.
- (iii) Let (V, T^*) be a minimum spanning tree of G . Prove that $w_{\max}(T^*) \leq w_{\max}(T)$ holds for every spanning tree (V, T) of G .