常微分方程式

$\boxed{6}$

$a, b \in \mathbb{R}$ を定数として次の実微分方程式を考える．

$$t\frac{d^2x}{dt^2} + (at+b)\frac{dx}{dt} + x = 0 \tag{1}$$

X を t の有理関数，式 (1) の解およびそれらの高階導関数の有理式全体からなる集合とする．特に，X は式 (1) の任意の解の 2 階導関数を含む．次の条件を満たす全単射写像 $\sigma : X \to X$ 全体の集合を G で表す．

(A1) 任意の $f, g \in X$ に対して $\sigma(f+g) = \sigma(f) + \sigma(g)$ および $\sigma(fg) = \sigma(f)\sigma(g)$ が成立

(A2) 任意の有理関数 f に対して $\sigma(f) = f$ が成立

(A3) 任意の $f \in X$ に対して $\dfrac{d}{dt}\sigma(f) = \sigma\left(\dfrac{df}{dt}\right)$ が成立

$x = e^t$ が式 (1) の解であるとき，以下の問いに答えよ．

(i) 定数 a, b を定めよ．

(ii) $x = e^t$ と 1 次独立な解 $x = \phi(t)$ を一つ求めよ．

(iii) $x(t)$ が解のとき $\sigma(x(t))$ も解であることを示せ．

(iv) $\phi(t)$ を (ii) で求めた解とする．(iii) により，任意の $\sigma \in G$ に対して，ある定数 $a_{ij}(\sigma) \in \mathbb{R}$ $(i, j = 1, 2)$ が存在して

$$\sigma(e^t) = a_{11}(\sigma)e^t + a_{12}(\sigma)\phi(t), \quad \sigma(\phi(t)) = a_{21}(\sigma)e^t + a_{22}(\sigma)\phi(t)$$

が成立する．各 $i, j = 1, 2$ に対して (i, j) 成分が $a_{ij}(\sigma)$ の 2 次正方行列を $A(\sigma)$ と表す．このとき，任意の $\sigma_1, \sigma_2 \in G$ に対して $A(\sigma_1)A(\sigma_2) = A(\sigma_2)A(\sigma_1)$ が成立することを示せ．

An English Translation:

Ordinary Differential Equations

$\boxed{6}$

Let $a, b \in \mathbb{R}$ be constants and consider the real differential equation

$$t\frac{d^2x}{dt^2} + (at+b)\frac{dx}{dt} + x = 0. \tag{1}$$

Let X be the set of all rational expressions of rational functions of t, solutions to equation (1) and their derivatives of any order. In particular, X contains the second-order derivative of any solution to equation (1). Let $\sigma : X \to X$ be a bijective map satisfying the following conditions:

(A1) For any $f, g \in X$, $\sigma(f+g) = \sigma(f) + \sigma(g)$ and $\sigma(fg) = \sigma(f)\sigma(g)$;

(A2) For any rational function f, $\sigma(f) = f$;

(A3) For any $f \in X$, $\dfrac{d}{dt}\sigma(f) = \sigma\left(\dfrac{df}{dt}\right)$.

Let G denote the set of all such maps. Assume that $x = e^t$ is a solution to equation (1). Answer the following questions.

(i) Determine the constants a and b.

(ii) Obtain a solution $x = \phi(t)$ which is linearly independent of $x = e^t$.

(iii) Show that $\sigma(x(t))$ is a solution if $x(t)$ is so.

(iv) Let $\phi(t)$ be the solution obtained in (ii). From (iii) we see that for any $\sigma \in G$ there exist some constants $a_{ij}(\sigma) \in \mathbb{R}$ $(i, j = 1, 2)$ such that

$$\sigma(e^t) = a_{11}(\sigma)e^t + a_{12}(\sigma)\phi(t), \quad \sigma(\phi(t)) = a_{21}(\sigma)e^t + a_{22}(\sigma)\phi(t).$$

Let $A(\sigma)$ be a 2×2 matrix whose (i, j)-element is $a_{ij}(\sigma)$ for $i, j = 1, 2$. Then show that $A(\sigma_1)A(\sigma_2) = A(\sigma_2)A(\sigma_1)$ for any $\sigma_1, \sigma_2 \in G$.