統計力学

$\boxed{5}$

時系列 $X_0, X_1, \ldots \in (-1,1)$ は, エルゴード的な力学系 $X_{n+1} = 4X_n^3 - 3X_n$ により決定されるものとする. その力学系は, 区間 $(-1,1)$ 上の確率測度 $\mu(dx) = \dfrac{dx}{\pi\sqrt{1-x^2}}$ を不変測度として持つ. さらに

$$\int_{-1}^{1} |B(x)|^2 \mu(dx) < \infty$$

を満足する任意の関数 $B(x)$ に対して,

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} B(X_i) = \int_{-1}^{1} B(x)\mu(dx) \quad \text{a.e.}$$

が成立するものとする. $\langle B \rangle$ は $\langle B \rangle = \int_{-1}^{1} B(x)\mu(dx)$ と定義する. 以下の問いに答えよ.

(i) $X_0 = \cos(\theta_0)$ に対する X_n の一般解を与えよ.

(ii) $B(x) = x$ の時, $\langle B \rangle = 0$ 及び $\langle B^2 \rangle = \dfrac{1}{2}$ であることを示せ.

(iii) $B(x) = 4x^3 - 3x$ の時, $\langle B \rangle = 0$ 及び $\langle B^2 \rangle = \dfrac{1}{2}$ であることを示せ.

(iv) $B(x) = (4x^3 - 3x)x$ の時, $\langle B \rangle = 0$ であることを示せ.

(v) $B(x) = a_0 + a_1 x + a_2(4x^3 - 3x)$ の時, $\langle B \rangle = a_0$ 及び $\langle B^2 \rangle - \langle B \rangle^2 = \dfrac{1}{2}(a_1^2 + a_2^2)$ であることを示せ.

(vi) $B(x) = a_0 + a_1 x + a_2(4x^3 - 3x)$ に対して, 1 次元ランダムウォークを

$$r(N) \equiv \sum_{i=0}^{N-1} \{B(X_i) - \langle B \rangle\} \quad N = 1, 2, \ldots$$

で構成した時, その拡散係数 $D \equiv \lim_{N\to\infty} \dfrac{\langle r^2(N) \rangle}{2N}$ を求めよ.

An English Translation:

Statistical Mechanics

5

Let a time series $X_0, X_1, \ldots \in (-1,1)$ be determined by an ergodic dynamical system $X_{n+1} = 4X_n^3 - 3X_n$, which has an invariant probability measure $\mu(dx) = \dfrac{dx}{\pi\sqrt{1-x^2}}$ on the interval $(-1,1)$. Assume that

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} B(X_i) = \int_{-1}^{1} B(x)\mu(dx) \quad \text{a.e.}$$

for any function $B(x)$ satisfying

$$\int_{-1}^{1} |B(x)|^2 \mu(dx) < \infty.$$

$\langle B\rangle$ is defined as $\langle B\rangle = \int_{-1}^{1} B(x)\mu(dx)$. Answer the following questions.

(i) Give a general solution X_n for an initial condition $X_0 = \cos(\theta_0)$.

(ii) Show that $\langle B\rangle = 0$ and $\langle B^2\rangle = \dfrac{1}{2}$ for $B(x) = x$.

(iii) Show that $\langle B\rangle = 0$ and $\langle B^2\rangle = \dfrac{1}{2}$ for $B(x) = 4x^3 - 3x$.

(iv) Show that $\langle B\rangle = 0$ for $B(x) = (4x^3 - 3x)x$.

(v) Show that $\langle B\rangle = a_0$ and $\langle B^2\rangle - \langle B\rangle^2 = \dfrac{1}{2}(a_1^2 + a_2^2)$ for $B(x) = a_0 + a_1 x + a_2(4x^3 - 3x)$.

(vi) Let us construct a one-dimensional random walk defined by

$$r(N) \equiv \sum_{i=0}^{N-1} \{B(X_i) - \langle B\rangle\} \quad N = 1, 2, \ldots$$

for $B(x) = a_0 + a_1 x + a_2(4x^3 - 3x)$. Obtain the diffusion coefficient $D \equiv \lim\limits_{N\to\infty} \dfrac{\langle r^2(N)\rangle}{2N}$.