複素関数/フーリエ解析

$\boxed{1}$

i を虚数単位 $(i^2=-1)$ として，関数

$$g(t)=\frac{1}{t^2+4i},\quad t\in\mathbb{R},$$

とそのフーリエ変換

$$\widehat{g}(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}g(t)e^{-i\xi t}dt,\quad \xi\in\mathbb{R},$$

を考える．また，関数 f を g と $\widehat{g}$ のたたみこみにより

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}g(t-s)\,\widehat{g}(s)ds$$

と定める．以下の問いに答えよ．

(i) フーリエ変換 $\widehat{g}(\xi)$ を求めよ．

(ii) $f(t)$ のフーリエ変換 $\widehat{f}(\xi)$ を求めよ．

(iii) $\widehat{f}(\xi)$ は $\mathbb{R}$ 上で C^1 級でないことを示せ．

(iv) $f(t)$ は $\mathbb{R}$ 上で C^∞ 級であることを示せ．

An English Translation:

Complex Functions/Fourier Analysis

$\boxed{1}$

Consider

$$g(t) = \frac{1}{t^2 + 4i}, \quad t \in \mathbb{R},$$

and its Fourier transform

$$\widehat{g}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-i\xi t} dt, \quad \xi \in \mathbb{R},$$

where i represents the imaginary unit ($i^2 = -1$). Define a function f as the convolution of g and $\widehat{g}$:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t-s)\,\widehat{g}(s) ds.$$

Answer the following questions.

(i) Obtain the Fourier transform $\widehat{g}(\xi)$.

(ii) Obtain the Fourier transform $\widehat{f}(\xi)$ of $f(t)$,

(iii) Show that $\widehat{f}(\xi)$ is not of class C^1 on $\mathbb{R}$.

(iv) Show that $f(t)$ is of class C^∞ on $\mathbb{R}$.