

グラフ理論

2

$G = (V, E)$ を節点集合 V , 枝集合 E から成る単純強連結有向グラフ, $N = [G, w]$ を G の各枝 $e \in E$ に非負実数値の重み $w(e)$ を与えて得られるネットワークとする. 節点 u から節点 v への有向枝は (u, v) と書き, その枝重みは $w(u, v)$ とも書く. 節点 u から節点 v への距離 $\text{dist}(u, v)$ を N における u から v への単純路上の枝重みの和の最小値と定める. 以下の問いに答えよ.

- (i) ある部分集合 $S \subseteq V$ と節点 $s \in S$ に対して, S から $V - S$ へ向かう枝 (u, v) の中で $\text{dist}(s, u) + w(u, v)$ の値を最小とする枝を (u^*, v^*) とする. このとき, $\text{dist}(s, v^*) = \text{dist}(s, u^*) + w(u^*, v^*)$ が成り立つことを証明せよ.
- (ii) N 上で始点 $s \in V$ からのダイクストラ法が $O(|E| \log |V|)$ 時間で実装できることを示せ.
- (iii) N に負の枝重みを持つ枝を 1 本加えたとき, ダイクストラ法の出力する値は正しい距離とならないことがある. そのような具体例を $3 \leq |V| \leq 4$ で作成し, ダイクストラ法が正しい距離を計算しない過程を説明せよ.

An English Translation:

Graph Theory

2

Let $G = (V, E)$ denote a simple, strongly connected digraph with a vertex set V and an edge set E , and let $N = [G, w]$ denote a network obtained from G by assigning a nonnegative real value $w(e)$ to each edge $e \in E$ as its weight. A directed edge from a vertex u to a vertex v is denoted by (u, v) and its weight is written as $w(u, v)$. Define the distance $\text{dist}(u, v)$ from a vertex u to a vertex v to be the minimum summation of weights of edges in a simple path from u to v in N . Answer the following questions.

- (i) For a subset $S \subseteq V$ and a vertex $s \in S$, let (u^*, v^*) be an edge that minimizes $\text{dist}(s, u) + w(u, v)$ among all edges (u, v) directed from S to $V - S$. Prove that $\text{dist}(s, v^*) = \text{dist}(s, u^*) + w(u^*, v^*)$.
- (ii) Show that Dijkstra's algorithm can be implemented to run in $O(|E| \log |V|)$ time for a given start vertex $s \in V$ in N .
- (iii) When an edge with a negative weight is added to N , Dijkstra's algorithm may fail to output the correct distance. Construct such an example with $3 \leq |V| \leq 4$, and explain how Dijkstra's algorithm fails to compute the correct distance.